OPTION M'

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1983

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, on note $\langle x \rangle$ la *partie fractionnaire* du nombre réel x, c'est-à-dire le nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$ tel que $x - \langle x \rangle$ appartienne à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Les parties II et III peuvent être traitées en ne connaissant de la partie I que le résultat indiqué par l'énoncé dans I.5.

I

1 - Pour tout x réel et tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q(x) = \sum_{p=1}^{q} \frac{\sin 2p\pi x}{p\pi}$. Montrer que

$$S_q(x) = \int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u}\,du - x.$$

2 - On définit sur $]-1, 1[$ la fonction φ par $\varphi(0) = 0$ et, pour tout u tel que $0 < |u| < 1$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sin \pi u} - \frac{1}{\pi u}$.

a. Montrer que φ est continûment dérivable sur $]-1, 1[$.

b. Établir l'existence d'une constante réelle A_1 telle que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et tout entier $q \geqslant 1$,

$$\left| S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\,dv \right| \leqslant \frac{A_1}{q}.$$

c. Calculer $S_q\left(\frac{1}{2}\right)$ et déduire de l'inégalité précédente la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv$.

3 - Établir l'existence d'une constante réelle A_2 telle que, pour tout x réel et tout entier $q \geqslant 1$, $|S_q(x)| \leqslant A_2$.

4 -*a*. Trouver en fonction de x la limite de la suite $(S_q(x))_{q\in\mathbb{N}^*}$ où $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

b. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$ disjointe de $\mathbb{Z}$. Établir l'existence d'un nombre α strictement positif tel que pour tout $x \in K$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, on ait $|x - r| \geqslant \alpha$. La convergence de la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur K ? Est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

5 - On rappelle que les intégrales de fonctions à valeurs complexes d'une variable réelle ont les mêmes propriétés opératoires que les intégrales de fonctions à valeurs réelles. Montrer que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p}\int_a^b f(x)\sin 2p\pi x\,dx.$$

.../...

II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple $(x, z) \in \left]0, +\infty\right[\times \mathbb{C}$, on note x^z le nombre réel ou complexe $e^{z \operatorname{Log} x}$, et la partie réelle et la partie imaginaire de z seront respectivement désignées par s et t. De plus, dans cette partie II, n est un entier strictement positif.

1 - *a*. Pour z complexe fixé, quelles sont les primitives de la fonction $x \mapsto x^{-z}$?

***b*.** Établir par récurrence sur n l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-z} = 1 + \int_1^n x^{-z}\, dx - z \int_1^n \langle x \rangle\, x^{-z-1}\, dx .$$

***c*.** En déduire pour s strictement positif et différent de 1 une valeur approchée à 0,5 près de $\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$ sous forme d'une fonction affine d'une puissance de n (on explicitera l'exposant de cette puissance et les coefficients de la fonction affine). Comment ce résultat se modifie-t-il si $s = 1$?

2 - *a*. Vérifier que si la partie réelle s de z est strictement positive, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \langle x \rangle\, x^{-z-1}\, dx$ converge.

***b*.** Soit Ω le complémentaire du point 1 dans le demi-plan complexe $s > 0$: on définit dans Ω la fonction ζ par

$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^{+\infty} \langle x \rangle\, x^{-z-1}\, dx .$$

Comparer, pour $s > 1$, $\zeta(z)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-z}$

***c*.** Établir, pour tout $z \in \Omega$ et tout réel $y \geqslant n$, l'égalité

$$\zeta(z) - \sum_{k=1}^{n} k^{-z} = \frac{n^{1-z}}{z-1} - \frac{1}{2} n^{-z} + z \int_y^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle \right) x^{-z-1}\, dx + \frac{z}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \int_n^y x^{-z-1} \sin 2p\pi x \, dx .$$

3 - On donne un entier $p > 0$ et un réel $t \in [-n, n]$ et on note g la fonction définie sur $\left[n, +\infty\right[$ par

$$g(x) = \frac{-\,x^{-3/2}}{2p\pi - \dfrac{t}{x}} .$$

Déterminer numériquement un nombre réel B_1 tel que pour tout $x \in \left[n, +\infty\right[$ on ait $g'(x) \leqslant \dfrac{B_1}{p} x^{-5/2}$, puis un nombre réel B_2 tel que pour tout $y \in \left[n, +\infty\right[$ on ait

$$\left| \int_n^y x^{-\frac{3}{2} - it} e^{2ip\pi x}\, dx \right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2}\, p} \quad \text{et} \quad \left| \int_n^y x^{-\frac{3}{2} - it} \sin 2p\pi x \, dx \right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2}\, p}$$

(on ne demande pas d'obtenir les réels B_1 et B_2 les plus petits possible).

.../...

4 - Établir l'existence d'un nombre réel B_3 tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in [-n, n]$ on ait

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) - \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2} - it} \right| \leqslant B_3 \frac{\sqrt{n}}{1 + |t|} .$$

III

Dans cette partie, n est un entier au moins égal à 2.

1 - ***a*** . Quel est, pour x réel strictement positif, le signe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x - 1 + \frac{1}{x}$?

b . Établir l'inégalité

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ k/2 < j < k}} \frac{1}{\sqrt{kj} \operatorname{Log} \frac{k}{j}} \leqslant \sqrt{2} \sum_{\substack{h,k \\ 1 \leqslant h < k \leqslant n}} \frac{1}{h}$$

où la première somme est prise égale à 0 si son ensemble d'indexation est vide, c'est-à-dire si $n = 2$.

c . Montrer l'existence d'un nombre réel C_1 tel que $C_1\, n \operatorname{Log} n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

2 - ***a*** . Établir l'inégalité

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj} \operatorname{Log} \frac{k}{j}} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 .$$

b . Montrer l'existence d'un nombre réel C_2 tel que $C_2\, n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

3 - ***a*** . Établir l'égalité

$$\int_0^n \left| \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2} - it} \right|^2 dt = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + i \sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in} - 1}{\sqrt{kj} \operatorname{Log} \frac{k}{j}} .$$

b . Montrer l'existence d'un nombre réel C_3 tel que $C_3\, n \operatorname{Log} n$ majore pour tout n les deux membres de l'égalité précédente.

4 - Démontrer qu'il existe un réel C tel que pour tout réel positif T on ait

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \leqslant CT \operatorname{Log}(T + 2) .$$

X83 Option M' Math. I- Corrigé - Fonction Zêta

Partie I

Soit $S_q(x) = \sum_{p=1}^{q} \dfrac{\sin 2p\pi x}{p\pi}$ et: $T_q = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u}\, du - x$. On a: $T_0 = 0$ et
$T_q - T_{q-1} = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u - \sin(2q-1)\pi u}{\sin \pi u}\, du = \int_0^x 2\cos 2q\pi u\, du = \frac{\sin 2q\pi x}{q\pi} = S_q - S_{q-1}$. Ces relations conviennent pour montrer par récurrence que $S_q = T_q$.

1°) Soit $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sin \pi u} - \dfrac{1}{\pi u}$.

a) Hormis au point 0, φ est de classe C^1 par les opérations algébriques utilisées. Pour simplifier, examinons $\psi(x) = \varphi(\frac{x}{\pi})$. En 0, on a la limite par DL: $\psi(x) = \dfrac{x - \sin x}{x \sin x} \sim \dfrac{x^3}{6x^2}$ ce qui tend vers 0. On dérive:

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x} \sim \frac{(x - x^3/6)^2 - x^2(1 - x^2/2)}{x^4} \sim \frac{1}{6}$$

Il en résulte que ψ est continue en 0, et que ψ' a une limite en 0. Le théorème de prolongement des fonctions C^1 s'applique et donne à ψ, et φ, la classe C^1 en 0.

b) On a: $S_q(x) + x - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\, dv = \int_0^x \sin(2q+1)\pi u\, \varphi(u)\, du$ ce que nous intégrons par parties, obtenant: $\dfrac{1}{(2q+1)\pi}\left(-\cos(2q+1)\pi x\, \varphi(x) + \displaystyle\int_0^x \cos(2q+1)\pi u\, \varphi'(u)\, du\right)$. Comme x est entre 0 et $\frac{1}{2}$, intervalle où φ et φ' sont bornées, la parenthèse est bornée. D'où la majoration proposée.

c) $S_q(\frac{1}{2})$ est nul. L'inégalité précédente donne alors que: $\displaystyle\lim_{q\to\infty} \int_0^{(2q+1)\pi/2} \frac{\sin v}{v}\, dv = \frac{\pi}{2}$. Cependant, si X est un réel positif, on peut choisir q tel que $(2q-1)\frac{\pi}{2} \leqslant X < (2q+1)\frac{\pi}{2}$, et l'on peut majorer $\left|\displaystyle\int_{(2q-1)\pi/2}^{X} \frac{\sin v}{v}\, dv\right|$ par $\displaystyle\int_{(2q-1)\pi/2}^{(2q+1)\pi/2} \frac{1}{v}\, dv = \ln\frac{2q+1}{2q-1}$ ce qui tend certainement vers 0 lorsque q (et x) tend vers l'infini. On en déduit aisément la convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv$ et sa valeur, $\dfrac{\pi}{2}$.

2°) On sait que toute fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, ayant une limite à l'infini, est bornée. C'est le cas de $F_q(x) = \displaystyle\int_0^{(2q+1)\pi x} .\frac{\sin v}{v}\, dv$. On peut dire que les $F_q(x)$ sont *uniformément bornées* sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité vue au 2°b entraîne que les $S_q(x)$ sont aussi uniformément bornées pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Comme, d'autre part, les S_q sont 1-périodiques et impaires, leur majoration uniforme peut être propagée d'abord à $[-\frac{1}{2}, 0]$ puis à $\mathbb{R}$. . ♦

3°) a) Si x est entier, $S_q(x)$ est nul ainsi que sa limite. Supposons ensuite que $x \in]0, \frac{1}{2}[$. En faisant tendre q vers l'infini dans l'inégalité du 2°b, l'on trouve que: $\displaystyle\lim_{q\to\infty} S_q(x) = \frac{1}{2} - x$. Il reste à prolonger cette égalité par imparité et 1-périodicité, ce qui est réalisé si l'on écrit: $\displaystyle\lim_{q\to\infty} S_q(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$, et $\frac{1}{2} - < x >$ sinon.

b) On considère la fonction $x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ qui est continue sur K, donc y atteint son minimum α, ce qui veut dire que $|x - r| \geqslant \alpha$ pour tous x de K et r de Z. Ce minimum est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$, et n'est pas nul, car $K \cap \mathbb{Z} = \varphi$. En prenant successivement $r = E(x)$ (la partie entière) et $r = E(x+1)$ l'on obtient: $1 - \alpha \geqslant < x > \geqslant \alpha$. Comme la fonction S_q est 1-périodique et impaire, de même que sa limite, il suffit de montrer que la convergence est uniforme sur $[\alpha, \frac{1}{2}]$. Notons $S(x) = \frac{1}{2} - < x >$. D'après le 2°$b$, on a: $|S_q(x) - S(x)| \leqslant \dfrac{A_1}{q} + \dfrac{1}{\pi}\left|\displaystyle\int_{(2q+1)\pi x}^{\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv\right|$. On prend q assez grand pour que $\dfrac{A_1}{q} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, la convergence de $\int_0^\infty \frac{\sin v}{v}\,dv$ donne: $\frac{1}{\pi}\left|\int_{(2q+1)\pi x}^\infty \frac{\sin v}{v}\,dv\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $(2q+1)\pi x > A_\varepsilon$. On choisit q tel que $(2q+1)\pi\alpha > A_\varepsilon$ et le tour est joué. Donc la convergence de (S_q) est uniforme sur K. Elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$ car S_q est continue, tandis que S ne l'est pas.

4°) La formule proposée est linéaire par rapport à f et par rapport à l'intervalle, ce qui veut dire que la relation de Chasles fonctionne de part et d'autre. Elle est aussi invariante par 1-translation (si on change a en $a+1$, b en $b+1$ et $f(x)$ en $f(x-1)$, la formule demeure), et par la symétrie $x \mapsto -x$ (la fonction S n'est pas tout à fait impaire, mais cela n'affecte qu'un nombre fini de points dans l'intégrale). Il en résulte (par collages, symétries) que l'on peut se contenter du cas où $a = 0$ et $0 < b < \frac{1}{2}$. On découpe l'intervalle en $[0,\alpha]\cup]\alpha,\frac{1}{2}]$. Sur le second sous-intervalle, la convergence uniforme de $(S_q f)$ permet de majorer $|S_q f(x) - S(x)f|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$ pour un α donné. Sur le premier, la fonction $(S_q - S)f$ est uniformément bornée (voir le 3°), et en prenant α assez petit l'on rend l'intégrale inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. D'où la formule. *Note: Cette formule est particulièrement significative pour $[a,b] = [0,1]$ car elle concerne alors les coefficients de Fourier de f. Elle reste valide pour f intégrable au sens de Riemann.*

Partie II

1°) a) On "sait" que la dérivée de $e^{f(x)}$ est $f'(x)e^{f(x)}$. Un primitive de $x \mapsto x^{-z}$ sera donc $\ln x$ si $-z = 1$ et $\frac{x^{1-z}}{1-z}$ sinon.

b) Pour $n = 1$ l'égalité est évidente. La vérification au rang n revient à montrer: $n^{-z} = \int_{n-1}^n x^{-z}\,\mathrm{d}x - z\int_{n-1}^n < x > x^{-z-1}\,\mathrm{d}x$. On remplace $< x >$ par $x - n + 1$ et l'intégrale devient: $\int_{n-1}^n \left[x^{-z} - z(x-n+1)x^{-z-1}\right]\mathrm{d}x$ et le crochet est juste la dérivée de $(x-n+1)x^{-z}$, d'où le résultat.

c) Dans l'égalité ci-dessus, l'on peut encadrer l'intégrale (avec $z = s > 0$):

$$0 \leqslant s\int_1^n < x > x^{-s-1}\,\mathrm{d}x \leqslant s\int_1^\infty x^{-s-1}\,\mathrm{d}x = 1$$

et l'on calcule explicitement l'autre intégrale; on en déduit qu'une valeur approchée à 0,5 près de $\sum_{k=1}^n k^{-s}$ est $\frac{1}{2} + \frac{1}{1-s}(n^{1-s} - 1)$. Pour $s = 1$ la valeur approchée sera: $\frac{1}{2} + \ln n$.

2°) a) L'intégrale proposée converge absolument, car $s + 1 > 0$ et: $| < x > x^{-z-1}| \leqslant |x^{-z-1}| = x^{-s-1}$

b) et donne:

$$\sum_{k=1}^\infty k^{-z} = 1 + \frac{1}{z-1} - z\int_1^\infty < x > x^{-z-1}\,\mathrm{d}x = \zeta(z)$$

L'explication de la définition apparemment compliquée de la fonction ζ est que cela permet de la définir pour $\operatorname{Re} z > 0$ et pas seulement pour $\operatorname{Re} z > 1$ (on réalise un prolongement).

c) On applique l'identité trouvée à la partie I à la fonction $x \mapsto x^{-z-1}$ sur l'intervalle $[n,y]$. On peut donc réécrire le second membre sous la forme:

$$\frac{n^{1-z}}{z-1} - \frac{1}{2}n^{-z} + z\int_n^\infty \left(\frac{1}{2} - < x >\right) x^{-z-1}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{1-z}}{z-1} + z\int_n^\infty (- < x >)\, x^{-z-1}\,\mathrm{d}x$$

Mais, compte tenu de la définition de ζ et du 1°b, le premier membre s'écrit: $\frac{z}{z-1} - z\int_n^\infty < x > x^{-z-1}\,\mathrm{d}x - 1 - \int_1^n x^{-z}\,\mathrm{d}x$. On calcule $\int_1^n x^{-z}\,\mathrm{d}x$, on simplifie d'où le résultat.

3°) On dérive g comme un produit.